

ЗАДАНИЯ ПЕРВОГО ЭТАПА  
РЕСПУБЛИКАНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ  
«БУДУЩЕЕ РЕСПУБЛИКИ»  
ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Найдите все функции  $f$ , удовлетворяющие при любых  $x, y \in (-\infty, +\infty)$  следующим двум условиям:

$$f(x) + f(y) = f(x)f^2(y) + f(y)f^2(x), \quad |f(x) - f(y)| < 2.$$

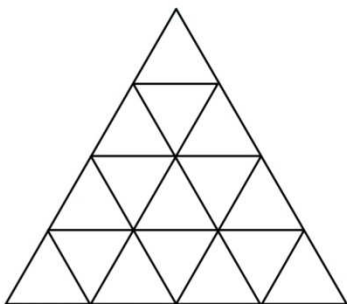
2. Докажите, что для любых действительных чисел  $x$  и  $y$  выполнено неравенство

$$x^2y^2 + 5x^2 - 6xy + 2y^2 - 6x - 6y + 13 \geq 0.$$

3. Число 2021 записали подряд десять раз. Докажите, что полученное сороказначное число нельзя представить в виде суммы трех кубов натуральных чисел.

4. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  основание  $AC$  равно 1,  $\angle ABC = 30^\circ$ . На сторонах  $AB, BC, CA$  взяты точки  $L, K, M$  соответственно. Пусть  $N$  – точка пересечения отрезков  $CL$  и  $KM$ . Известно, что  $KC = 1$  и площадь треугольника  $KCN$  равна площади четырехугольника  $ALNM$ . Найдите  $\angle LNK$ .

5. Правильный треугольник со стороной 4 разбит на 16 маленьких правильных



треугольников со стороной 1 (см. рис.). Можно ли числа  $1, 2, \dots, 16$  расставить по одному в каждом маленьком треугольнике так, чтобы сумма всех чисел в любом треугольнике со стороной 2 была одинаковой?

*Каждое задание оценивается в 20 баллов.*